

SAMENVATTING Steekproeven (H6, H10, 11e ed) en (H7, H10, 12^e ed)

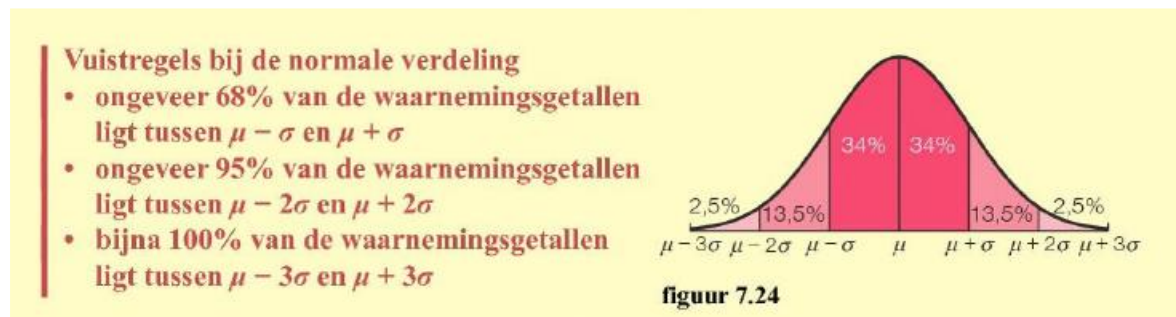
Normale verdeling

Hier hebben we al veel over gezegd. Normale verdeeld zijn alle maten en gewichten uit de natuur als ook de maten en gewichten van door mensen gemaakte producten.

Nog gekker: veel uitkomsten (zoals steekproefresultaten) zijn zelf ook normaal verdeeld.

Het feit dat iets normaal verdeeld is, moet wel in zo'n opgave zijn vermeld; het is immers mogelijk dat een maat of gewicht niet normaal verdeeld is, maar juist scheef. Dan gelden totaal andere wetten en regels die overigens niet meer in HAVO-A zitten.

Kennen: Percentages, vorm van de grafiek en de grenzen.



Steekproeven

Nogmaals: steekproeven organiseer je omdat je niet alle door de mens gemaakte producten aan een test wil onderwerpen. Dit kost teveel tijd en daarmee ook teveel geld. Dat doen fabrikanten nu eenmaal niet.

Dus neem je een kleine maar representatieve selectie die zonder enige voorkeur wordt genomen uit het grotere geheel. Een steekproef heeft daarmee een steekproefomvang (men zegt: lengte) meestal met n aangeduid. Ook levert elke steekproef een steekproefgemiddelde op. Je meet immers 100 pakken suiker die ca 1000gr wegen. Uit een steekproef als deze komt mss als gemiddelde $\bar{X}=1002$ gram en de steekproefstandaardafwijking $S = 20$ gram.

1. De variatie kennen van steekproefgemiddelden

Dan moeten we beseffen dat dat je niet 1 maar vele steekproeven kan doen, die daarmee ook zelf normaal verdeeld zijn. Dus 68% van de steekproefgemiddelden beweegt zich tussen:

$[\bar{u} - s$ en $\bar{u} + s]$ met $\bar{u}$ = het populatiegemiddelde en s de gewone standaardafwijking.

Echter gold dit voor de producten zelf en niet voor de steekproef van producten. Daarom geldt voor steekproeven een aangepaste versie: Steekproefgemiddelden zijn normaal verdeeld zodat 68% van de steekproefgemiddelden ligt tussen $[\bar{u} - S$ en $\bar{u} + S]$ $S = s/\sqrt{n}$. Die laatste is nieuw.

De steekproefstandaardafwijking is dus te benaderen met de nieuwe formule: $S = s/\sqrt{n}$.

Stel de standaardafwijking van pakken hagelslag : ($\bar{u}=250g$, $s=20gr$)

Een steekproef uit die 1000-en pakken met $n=100$ pakken, levert mss op: $\bar{X}=250$ en $S=20/\sqrt{100} = 2$.

Onderstaande voorbeeld laat zien welk gedeelte van de steekproeven (indien ook georganiseerd) er binnen bepaalde grenzen zullen vallen. Ook hier zie je dat de meeste (95%) steekproefresultaten binnen die 95% vallen.

Het irreele van dit voorbeeld is dat eigenlijk de uitkomst al vaststaat: $\mu = 500$ gram en $\sigma = 10$ gram. Maar goed, het laat het e.e.a. zien.

Voorbeeld

Bij de supermarkt kun je bakjes druiven kopen. De inhoud van deze bakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 gram en een standaardafwijking van 10 gram.

Bij een onderzoek van de consumentenbond worden steekproeven van vier bakjes genomen en wordt het gemiddelde gewicht van de bakjes druiven in de steekproef berekend. Welk percentage van de steekproeven zal een gemiddeld gewicht van minder dan 490 gram opleveren?



Aanpak

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de verdeling van het steekproefgemiddelde.

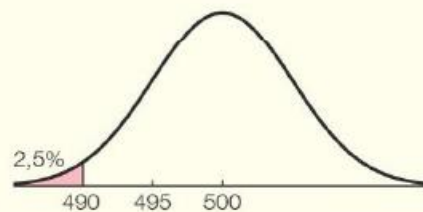
Gebruik vervolgens de vuistregels bij de normale verdeling.

Uitwerking

Voor de steekproeven geldt $\mu = 500$ gram en

$$\sigma = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5 \text{ gram.}$$

Zie de schets, dus 2,5%.



Je ziet dat steekproeven standaardafwijkingen hebben die beduidend krappere liggen dan de standaardafwijking van de producten zelf.

Lees theorie pag 103 (12^e ed) na en maak som 22, 23, en 25 om aan dit verhaal te wennen.

2. Steekproeven gebruiken uit een populatie (μ en σ onbekend) om de echte μ te vinden.

Dit is een reelere situatie: Men weet van een populatie (of partij producten) niet wat μ en σ is. De reden van het houden van een steekproef is omdat je wil weten wat het echte gemiddelde is. Je wil immers niet alle producten nameten. Consequentie is wel dat je het echte gemiddelde nooit zult leren kennen maar wel kunt vangen met een betrouwbaarheidsinterval. Dit zegt dat je 95% (of 68%) zeker kan zijn dat de echte waarde van μ ligt tussen de grenzen $[\bar{X} - 2 \cdot S/\sqrt{n}]$ en $[\bar{X} + 2 \cdot S/\sqrt{n}]$

Dus wat zien we: er wordt een steekproef gedaan, dit geeft een steekproefgemiddelde als resultaat met een steekproefstandaardafwijking. Die laatste wordt bepaald met de formule $S/\sqrt{n}$.

Vervolgens kunnen we vaststellen met een 95 of 68% betrouwbaarheidsinterval dat het echte gemiddelde in dit interval ligt. Doordat steekproefresultaten normaal verdeeld zijn en dus de resultaten in de praktijk rond het echte gemiddelde zullen rondhangen, weet je voor 95% zeker dat de echte waarde in zo'n interval zit.

In opgave 25 zag je dat het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ in 95% van de gevallen minder dan $2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van het populatiegemiddelde μ verschilt.

Omgekeerd is het ook zo dat μ in 95% van de gevallen minder dan

$2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van $\bar{X}$ verschilt. Het interval $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ bevat dus

in 95% van de gevallen het gemiddelde μ . Dit geeft een goede manier om μ te bepalen uit het steekproefresultaat, met als enige probleem dat σ onbekend is. Deze waarde van σ kun je goed schatten door de steekproefstandaardafwijking S bij je steekproef te gebruiken. Zo kun je dus een interval berekenen dat in 95% van de gevallen μ bevat.

Dit interval heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde**.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Hier zegt men dit: In de praktijk weten we u niet, alleen door het nemen van de steekproef (of steekproeven) krijgen we met zo'n interval een idee hoe waarschijnlijk het is dat de echte u in dat gebied ligt.

Vooraf de opmerking in het geel hier pal boven laat zien wat je moet doen:

- (1) Voer de steekproef uit (wordt voor ons gedaan en resultaat ervan melden ze)
- (2) Hieruit volgt $\bar{X}$ (het steekproefgemiddelde) en de steekproefstandaardafwijking (die iets zegt hoever de getallen/meetresultaten in de steekproef verschillen van dat gemiddelde).
- (3) Wij berekenen dus het betrouwbaarheidsinterval (meestal 95%) en zeggen dan: Je hebt nu 95% kans dat je echte waarde van het gemiddelde (hier u genoemd) in dat interval ligt omdat steekproefuitkomsten met z'n allen normaal verdeeld zijn.

Voorbeeldje uit 12^e ed:

Voorbeeld

Bij een onderzoek onder 715 Nederlandse jongeren naar hun smartphonegebruik, blijkt de gemiddelde dagelijkse gebruiksduur 3,5 uur te zijn. De bijbehorende standaardafwijking is 1 uur en 10 minuten.

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde gebruiksduur onder jongeren in minuten nauwkeurig.
- b** Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Uitwerking

- a** $\bar{X} = 3,5 \cdot 60 = 210$ minuten, $S = 70$ minuten en $n = 715$.

$$\left[210 - 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}}, 210 + 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}} \right] \approx [205, 215]$$

- b** De gemiddelde dagelijkse gebruiksduur van de smartphone van Nederlandse jongeren ligt met 95% zekerheid tussen 205 en 215 minuten.

Merk op dat het antwoord niet is: het landelijk gemiddelde is dus zo en zo. Die info krijg je nooit, hooguit steeds beter benaderd door steekproeven te vergroten (meer objecten meten).

3. Proporties en steekproeven

We hebben het al eerder gezien:

We kunnen in plaats van met aantallen en gemiddelden te werken, ook werken met fracties of proporties. Weer het bekende voorbeeld: Uit eerder onderzoek weten we dat 17% van de Nederlanders linkshandig is. $p=0,17$.

Welke sigma σ hoort hier nu bij? Daarvoor is de volgende nieuwe formule bedacht:

Bij populatieproportie p en steekproefomvang n is de steekproefproportie normaal verdeeld met gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

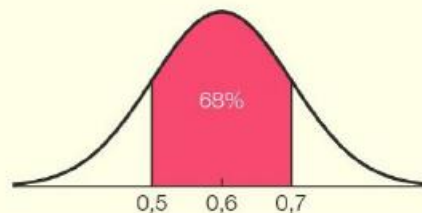
Voorbeeld

In een land heeft 60% van de bevolking bruine ogen. Bij een groep van 24 personen wordt de proportie personen met bruine ogen genoteerd. Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,5 en 0,7 zal liggen.

Uitwerking

$$\mu = p = 0,6 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{24}} = 0,1.$$

Zie de schets, dus bij 68%.



Dit voorbeeld laat zien dat (uitgaande van het landelijk blijkbaar bekende resultaat) $p=0,60$ een standaardafwijking bepaald moet worden met de bovenstaande formule: Die blijkt hier 0,1 te zijn. Betekenis van het plaatje: We vinden 0,6 als uitkomst bij een steekproef van 24. Het waarschijnlijkheidsgebied van 68% loopt van 0,5 tot 0,7. En dus het 95% waarschijnlijkheidsgebied van 0,4 tot 0,8.

Dat is, gezien de uitkomst best grof. Je meet 60% maar moet constateren dat voor 95% zekerheid dat de echte waarde ook zo iets is, het gebied loopt van 40% tot 80%. Dat is veel te grof eigenlijk. Enige oplossing: neem niet 24 mensen, maar kies er 1000 of zo.

Als we dat doen: $p = 0,60$ (blijft zo) en s wordt wortel uit $(0,6 \cdot 0,4 / 1000) = 0,015$.

Dan is het 95% betrouwbaarheidsinterval ineens: $0,60 - 2 \cdot 0,015$ tot $0,60 + 2 \cdot 0,015$ ofwel:

$[0,57 \text{ tot } 0,63]$ ofwel in %: 57% tot 63%. Je ziet dat het zin heeft genoeg aantallen te nemen in de steekproef. Hoe kleiner, hoe onnauwkeuriger, hoe meer, hoe beter.

OEFEEN zelf met opgaven 32 tot 36 in ed 12.

4. Het vinden van de populatieproportie mbv steekproeven.

In de laatste situatie weten we (praktijksituatie) niet wat de echte landelijke proportie is. En dus kennen we ook sigma niet. We moeten er dus via steekproeven achter komen.

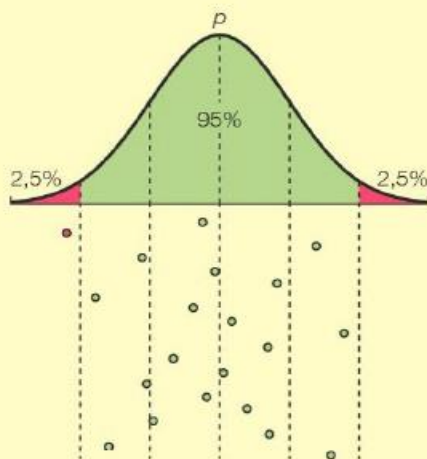
Eerst laat het boek zien dat steekproeven elk hun eigen steekproefproportie hebben. In par 2 was dat de steekproefgemiddelde maar feitelijk het zelfde..

Theorie B Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

Bij een onderzoek onder n personen met populatieproportie p zal de steekproefproportie $\hat{p}$ per steekproef verschillen. De waarden van $\hat{p}$ ontstaan uit een steekproevenverdeling die normaal verdeeld is met

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

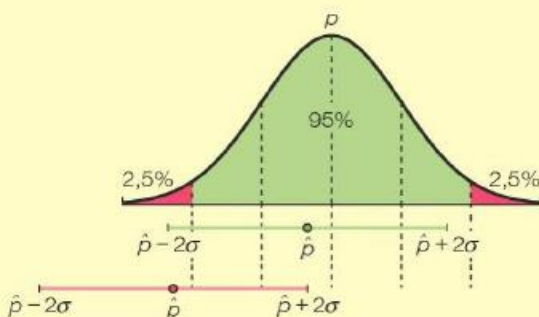
In figuur 7.32 staat deze steekproevenverdeling met daaronder 20 steekproefproporties uit deze verdeling. Elke steekproefproportie staat als bolletje weergegeven. De verwachting is dat 95% van de steekproefproporties in het groene gebied valt.



figuur 7.32

In figuur 7.33 is bij twee steekproeven ook het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ getekend als een lijnstuk vanaf $\hat{p} - 2\sigma$ tot en met $\hat{p} + 2\sigma$.

Bij het groene lijnstuk valt de populatieproportie p binnen dit interval. Bij het rode lijnstuk valt de populatieproportie p buiten dit interval.



figuur 7.33

In 95% van de steekproeven zal het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ de populatieproportie p bevatten.

Men geeft ook een voorbeeld:

Merk op dat net als in par. 3, je nu NIET weet wat de landelijke populatiegetallen zijn. (3^e zin hieronder). Het verschil p en $\hat{p}$ met dakje is onbelangrijk trouwens. p -dakje is de steekproefproportie: p zonder dakje de populatieproportie. Wohh.

Om het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ te berekenen heb je

$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ nodig. Het probleem is dat p onbekend

is, daar ben je immers naar op zoek. Een oplossing voor dit probleem is het schatten van p met de steekproefproportie $\hat{p}$. Je vervangt dan p door $\hat{p}$ bij het berekenen van σ . Voor grotere waarden van n zal deze schatting steeds beter kloppen.

Zo krijg je een interval dat in 95% van alle steekproeven p bevat, dit heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie**.

Het doel van een onderzoek naar een proportie is het bepalen van p . Dit doe je op basis van $\hat{p}$, het resultaat van de steekproef.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met n de steekproefomvang.

Voorbeeld

Twee dagen voor een verkiezing wordt aan 1200 stemgerechtigde Nederlanders gevraagd of ze van plan zijn te gaan stemmen.

Van deze 1200 zeggen 756 inderdaad te gaan stemmen.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.

Uitwerking

$$\hat{p} = \frac{756}{1200} = 0,63 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,63 \cdot 0,37}{1200}} = 0,0139...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0139... \approx 0,602 \text{ en}$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0139... \approx 0,658$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,602; 0,658]$.

Rond in een betrouwbaarheidsinterval proporties af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.

Gelezen? Helder! Het verschil met par 2 is dat daar met gemiddelden werd gewerkt en hier met proporties. De overeenkomst is dat de populatiekenmerken onbekend is wat DE REDEN is om steekproeven te houden.

Oefen met 38 tot 41 (12^e ed).

Paragraaf 1 en 2 gaan over H7.2 en paragraaf 3 en 4 hier gaan over 7.3
In H7.4 van het boek, krijgen we veel oefenstof.

5. Oefenstof en enkele toevoegingen.

Theorie A Twee soorten betrouwbaarheidsintervallen

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met twee soorten betrouwbaarheidsintervallen.

- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Ja ik ben blij dat deze opmerking in editie 12 zit. In de 11^e editie ontbrak ie.

Ook deze aanwijzing is best nuttig:

Vaak kun je ook aan de gegevens in een opgave zien welk betrouwbaarheidsinterval gevraagd wordt.

Voor het betrouwbaarheidsinterval voor een populatieproportie heb je $\hat{p}$ en n nodig.

Voor het betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde heb je $\bar{X}$, S en n nodig.

Oefen nu met opgaven: tot opgaven 53.

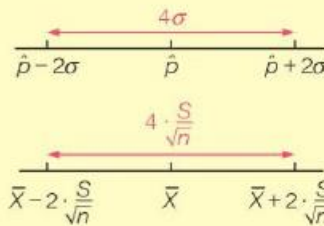
Op bladzijde 124 zeurt men nog even over de 'breedte van het betrouwbaarheidsinterval:

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor de populatieproportie is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor het populatiegemiddelde is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



Men kan dat ook zeggen van een 68% interval, dat is 2 sigma's breed.

Een tikje onzinnig voorbeeld:

Voorbeeld

Een ondernemer overweegt een koffiezaak te openen in het centrum van 's-Hertogenbosch. Hij wil onderzoeken hoeveel koffie de klanten van koffiezaken in 's-Hertogenbosch dagelijks gemiddeld drinken. Bij de onderzoeksresultaten zal een 95%-betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld met een maximale breedte van 50 mL.

Onderzoek of minimaal 100, 200 of 300 mensen onderzocht moeten worden. Ga bij je berekening uit van $S = 205$ mL.

Aanpak

Gebruik de formule voor de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de verschillende waarden van n om na te gaan wanneer de breedte voor het eerst kleiner dan 50 mL is.

Uitwerking

$$4 \cdot \frac{205}{\sqrt{100}} = 82 \text{ mL}, 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{200}} \approx 58 \text{ mL} \text{ en } 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{300}} \approx 47 \text{ mL}.$$

Er moeten dus minimaal 300 mensen onderzocht worden.

Op pag 127 doen ze het omgekeerde: het bepalen van de waarde van n (steekproefgrootte) op basis van enkele wensen:

Theorie D Berekenen van de steekproefomvang

In opgave 59 kreeg je de vergelijking $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} = 0,1$. Door deze vergelijking op te lossen kun je bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval de steekproefomvang n berekenen die nodig is om bij een proportie van 0,4 een breedte van 0,1 te krijgen.

Het oplossen van deze vergelijking mag met de GR. Je krijgt $n = 384$.

Voor een breedte van maximaal 0,1 heb je bij $\hat{p} = 0,4$ dus een steekproefomvang van minstens 384 nodig.

Om de steekproefomvang te berekenen bij de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval los je een vergelijking op.

- Bij een proportie: $\text{breedte} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$.
- Bij een gemiddelde: $\text{breedte} = 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Bij het oplossen met de GR gebruik je bij y_1 de formule voor de breedte en bij y_2 de vereiste breedte. Een geschikt venster stel je in door y tussen 0 en het dubbele van y_2 te kiezen. Voor x zijn de grenzen 0 en 2000 een goed uitgangspunt. Zie je geen snijpunt, verhoog dan de bovengrens van x .

Feitelijk zegt men hier: we willen dat het 95% interval niet breder is dan 0,1. Aangezien dit 4 sigma breed is, moet je dus oplossen:

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,025$$

$$\frac{p(1-p)}{n} = 0,000625$$

draai n en 0,000625 om:

$$\frac{p(1-p)}{0,000625} = n$$

Dus als p was 0,4 moet gelden:

$$\frac{0,4 \cdot 0,6}{0,000625} = n, \text{ dus } n = 384.$$

In het boek gebruiken ze de GRM. Hoewel ik best een voorstander van GRM's ben, is dat hier een omweg.

Lees zelf de voorbeelden en maak opdrachten vanaf som 60.